

4 -PRIMITIVES - INTEGRALES - COURS

1) Primitives :

Définition 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Une fonction F est une primitive de f si et seulement si : F est définie et dérivable sur I et $F' = f$.

Exercice 1

Dans le tableau ci-dessous, u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I . F désigne une primitive de f .

f	F	Définie sur tout intervalle contenu dans
$a \ (a \in \mathbb{R})$	$a x$	\mathbb{R}
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2 \sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0, +\infty[$

	f	F
1	$u' \times u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
2	$\frac{u'}{u^2}$, avec $u \neq 0$	$-\frac{1}{u}$
3	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2 \sqrt{u}$
4	$\frac{u'}{u}$, avec $u > 0$	$\ln(u)$
5	$u' e^u$	e^u

Exercice 2

Propriété :

Soit f une fonction, F une primitive de f et λ un nombre réel.

- Pour tout réel c , $F + c$ est également une primitive de f
- (λF) est une primitive de (λf) .

Exercice 3

2) Intégrales :

Définition 2 :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, et F une primitive de f sur $[a, b]$, alors on définit l'intégrale de a à b de f et on note : $\int_a^b f(x)dx$, le nombre défini par : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

La différence : $F(b) - F(a)$, est aussi notée : $[F(x)]_a^b$.

Exercice 4

4 - PRIMITIVES - INTEGRALES - EXERCICES

Temps indicatif à consacrer aux exercices : 2h30 à 4h.

Exercice 1 :

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = 1$$

$$g(x) = \cos x$$

$$h(x) = \exp(x)$$

$$i(x) = 2x$$

$$j(x) = \frac{1}{x}$$

$$k(x) = 0$$

Exercice 2 :

Pour chacune des fonctions ci-dessous indiquer s'il vous semble possible, ou pas, d'en calculer une primitive ;

Si oui, indiquez en utilisant qu'elle formule du tableau et préciser la fonction u .

© Dans cet exercice, on ne demande pas de calculer explicitement de primitive !

$$1. f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 2}$$

$$2. f(x) = \frac{3 \sin x}{2(\cos x + 1)}$$

$$3. f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$$

$$4. f(x) = \frac{\cos x}{1 - 2 \sin x}$$

$$5. f(x) = \sin^2 x \cos x$$

$$6. f(x) = \sqrt{x} \exp(\sqrt{x})$$

$$7. f(x) = x(x^2 + 2)^3$$

$$8. f(x) = \exp(\sin x) \sin(x)$$

$$9. f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$10. f(x) = \frac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

$$11. f(x) = \exp(\sin x) \cos(x)$$

$$12. f(x) = x e^x$$

Fonction	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Non												
Oui ($u^0 \dots$)												

Exercice 3 :

Déterminer pour chacune des fonctions ci-dessous, une primitive, lorsque cela est possible.

$$1. f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$2. f(x) = \sin x \cos x$$

$$3. f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

$$4. f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Exercice 4 :

Calculer, si possible, les intégrales suivantes:

$$1. A = \int_1^2 f(x)dx, \text{ avec } f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

$$2. B = \int_0^1 f(x)dx, \text{ avec } f(x) = x e^{x^2}.$$

$$3. C = \int_0^1 f(x)dx, \text{ avec } f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

$$4. D = \int_1^3 f(x)dx ; \text{ avec } f(x) = \frac{3}{2x-1}.$$